О ЗАДАЧЕ ЦЕЛОЧИСЛЕННОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ С ОГРАНИЧЕННЫМИ МИНОРАМИ

Д.В. Грибанов[1], **С.И. Веселов**[2],

[1]Нижегородский Государственный Университет им. Лобачевского, просп. Гагарина 23, 603950 Нижний Новгород, Россия

Лаборатория ЛАТАС, Национальный Исследовательский Университет Высшая Школа Экономики, ул. Родионова 136, 603093 Нижний Новгород, Россия

dimitry.gribanov@gmail.com

[2]Нижегородский Государственный Университет им. Лобачевского, просп. Гагарина 23, 603950 Нижний Новгород, Россия

veselov@vmk.unn.ru

Рассмотрим матрицу $A \in Z^{m \times n}$, пусть r её ранг. Пусть $P(A, b) = \{x \in \mathbb{R}^n : \ Ax \leq b\}$, где $b \in \mathbb{Z}^m$. Таким образом $P(A, b)$ есть полиэдр заданный системой с матрицей A. Обозначим за $\Delta(A)$ и $\delta(A)$ соответственно максимальное и минимальное абсолютные значения $r \times r$ миноров матрицы A. Обращаясь к работе [1], будем называть матрицу A *почти унимодулярной* если $\Delta(A) = 2$ и $\Delta_{r-1}(A) \leq 1$, где Δ_{r-1} есть максимальное абсолютное значение миноров порядка $(r-1) \times (r-1)$. В работе [2] *бимодулярными* матрицами названы такие матрицы A, у которых $\Delta(A) = 2$. Также в данной работе были получены результаты о полиэдрах заданных системами с бимодулярными матрицами ограничений. Например, задача проверки содержит ли такой полиэдр целую точку сводится к задаче определения телесности полиэдра, которая является полиномиально разрешимой.

В работе [3] даны определения *k-модулярной* и *k-регулярной* матриц, также описаны свойства данных матриц и полиэдров заданных системами с такими матрицами.

Определение 1 Матрица A называется k-модулярной, если для любой её базисной $(r \times r)$ подматрицы B верно $|det(B)| \in \{0, \pm k^i : \ i \in \mathbb{N}\}$.

Определение 2 Матрица A называется k-регулярной, если для любой её невырожденной квадратной подматрицы B верно, что kB^{-1} целочисленная матрица.

Шириной выпуклого тела P будем называть следующую величину:

$$w(P) = min_{c \in Z^n \setminus \{0\}} \{max_P c^\top x - min_P c^\top x\}.$$

Хинчиным [4] был установлен следующий факт: если P не содержит точек из Z^n, тогда $width(P) \leq f(n)$, где величина $f(n)$ зависит только от размерности. Существует много оценок на величину $f(n)$. Наилучшая оценка $O(n^{3/4} log^c(n))$ дана в работе [5]. Наилучшая оценка для симплексов $O(n \, log(n))$ дана в работе [6].

Результаты работы:

1) *Показано, что задача целочисленного программирования с почти унимодулярной матрицей ограничений полиномиально разрешима. К сожалению сложных примеров полиэдров заданных такими матрицами пока не было найдено.*

2) *Пусть $P = P(A, b)$ есть симплекс и $P \cap \mathbb{Z}^n = \emptyset$, тогда $w(P) < \delta(A) - 1$. Если же $w(P) \geq \delta(A) - 1$, то в P можно найти целую точку, используя полиномиальный алгоритм. Также в таком случае, для задачи целочисленной оптимизации применимы алгоритмы групповой минимизации предложенные Гомори и Ху [7,8], что приводит к временной сложности $O(n\delta(A))$. В данном результате существенно используются свойства* углового многогранника *[7,9]. Введением в изучение симплексов без целых точек могут послужить работы [10,11].*

3) *Пусть $P = P(A, b)$ есть политоп и $P \cap \mathbb{Z}^n = \emptyset$. Пусть также любой базисный минор матрицы A есть $\pm\Delta(A)$ или 0. Тогда $w(P) < (\Delta(A) - 1)(n + 1)$. В противном случае показано, что $|P \cap \mathbb{Z}^n| \geq n + 1$. Более того, данные $n + 1$ целых точек могут быть найдены за полиномиальное время. Доказательство опубликовано в сборнике [12].*

4) *Аналогичный результат получен для k-модулярной матрицы A. В данном случае, для выполнения неравенства* $|P \cap \mathbb{Z}^n| \geq n+1$ *нужно, чтобы* $w(P) \geq (\Delta(A)-1)\dfrac{\Delta(A)}{\delta(A)}(n+1)$. *Похожий результат получен и для случая k-регулярной матрицы A.*

5) *Приведен пример конуса заданного* бимодулярной *матрицей ограничений и порожденного экспоненциальным числом образующих. Данный пример важен, потому что из противоположного утверждения о полиномиальности числа рёбер в любом* бимодулярном *конусе следовала бы полиномиальность задачи целочисленного программирования на политопе с бимодулярной матрицей ограничений.*

Работа выполнена при поддержке лаборатории алгоритмов и анализа сетевых структур НИУ ВШЭ, грант правительства РФ дог. 11.G34.31.0067 и при поддержке РФФИ, грант 15-01-06249.

Литература

1. Cornuéjols G., Zuluaga L.F. *On Padberg's conjecture about almost totally unimodular matrices* // Oper. Res. Lett. Vol. 2000. 27. No. 3. P. 97–99.

2. Veselov S.I., Chirkov A.J. *Integer program with bimodular matrix* // Discrete Optimization. 2009. Vol. 6. No. 2. P. 220–222.

3. Kotnyek Balázs. *A generalization of totally unimodular and network matrices.* PhD thesis. Published by ProQuest LLC, 2014.

4. Khinchine A. *A quantitative formulation of Kronecker's theory of approximation* // Izvestiya Akademii Nauk SSR Seriya Matematika. 1948. Vol. 12. P. 113–122 [in Russian].

5. Rudelson M. *Distances between non-symmetric convex bodies and the MM^*-estimate* // Positivity. 2000. Vol. 4. No. 2. P. 161–178.

6. Banaszczyk W., Litvak A.E., Pajor A., Szarek S.J. *The flatness theorem for non-symmetric convex bodies via the local theory of Banach spaces* // Mathematics of operations research. 1999. Vol. 24. No. 3. P. 728–750.

7. Gomory R.E. *On the Relation Between Integer and Non-Integer Solutions to Linear Programs* // Proc. Natl. Acad. Sci., USA. 1965. Vol. 53. No. 2. P. 260–265.

8. Hu T.C. *On the Asymptotic Integer Algorithm.* MRC Report 946, University of Wisconsin, Madison. 1968.

9. Shevchenko V.N. *Qualitative Topics in Integer Linear Programming.* Translations of Mathematical Monographs. AMS. 1996.

10. Haase C., Ziegler G. *On the Maximal Width of Empty Lattice Simplices* // Europ. J. Combinatorics. 2000. Vol. 21. P. 111–119.

11. Sebö A. *An Introduction to Empty Lattice Simplexes* // In: LNCS, eds.: Cornuéjols G., Burkard R.R., Woeginger R.E. Vol. 1610. 1999. P. 400–414.

12. Gribanov D. V. *The Flatness Theorem for Some Class of Polytopes and Searching an Integer Point* // Springer Proceedings in Mathematics & Statistics. Models, Algorithms and Technologies for Network Analysis. 2013. Vol. 104. P. 37–45.